Razones Trigonométricas

En el triángulo ABC, rectángulo en C (figura 1), se definen las siguientes razones:

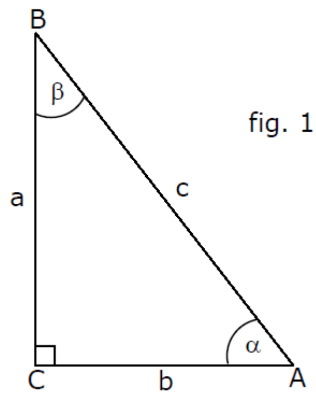


fig. 1

Seno de α =	**sen** α =	$\dfrac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$= \dfrac{a}{c}$
Coseno de α =	**cos** α =	$\dfrac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$= \dfrac{b}{c}$
Tangente de α =	**tg** α =	$\dfrac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha}$	$= \dfrac{a}{b}$
Cotangente de α =	**cotg** α =	$\dfrac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha}$	$= \dfrac{b}{a}$
Secante de α =	**sec** α =	$\dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha}$	$= \dfrac{c}{b}$
Cosecante de α =	**cosec** α =	$\dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha}$	$= \dfrac{c}{a}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS DE 30º, 45º y 60º

Considerando los triángulos de las figuras 1 y 2, se tiene que:

fig. 1

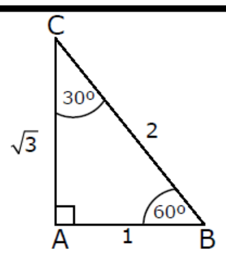
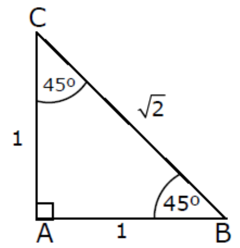


fig. 2

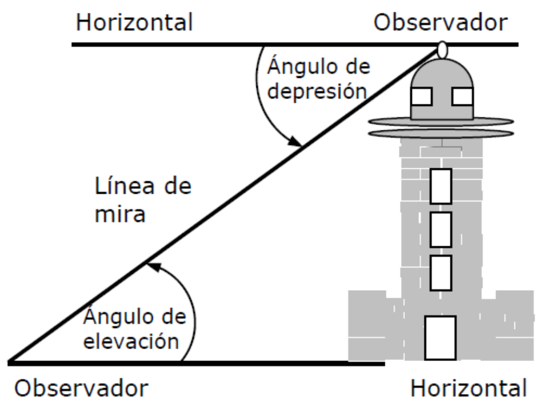


Razón \ Ángulo	30º	45º	60º
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ángulos de **elevación** y de **depresión** (fig. 3) son aquellos formados por la horizontal, considerada a nivel del ojo del observador y la línea de mira, según que el objeto observado esté por sobre o bajo esta última.

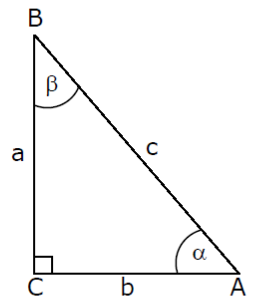
Con respecto a un observador, los ángulos de elevación y de depresión constituyen ángulos alternos internos entre paralelas, por lo tanto, sus medidas son iguales

fig. 3



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Las identidades 1, 2, 3, 4 y 5 se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas. La identidad 6, se deduce combinando las definiciones con el Teorema de Pitágoras.

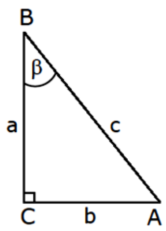


1. $\text{sen } \alpha \cdot \text{cosec } \alpha = 1$	4. $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$
2. $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$	5. $\text{cotg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$
3. $\text{tg } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha = 1$	6. $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Ejercicios

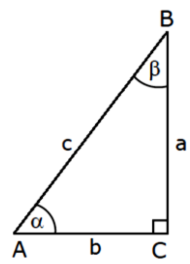
1. De acuerdo con el triángulo ABC de la figura, ¿qué relación es verdadera?

a. $sen\ \beta = \frac{c}{b}$
b. $sen\ \beta = \frac{a}{c}$
c. $cos\,\beta = \frac{b}{c}$
d. $\text{tg}\ \beta = \frac{b}{a}$
e. Ninguna de ellas



2. Con respecto al triángulo rectángulo ABC de la figura, ¿cuál de las opciones siguientes es verdadera?

a. $\sec \beta = \frac{c}{b}$
b. $\cos \alpha = \frac{a}{c}$
c. $\text{cotg}\, \beta = \frac{b}{a}$
d. $co\sec \alpha = \frac{c}{b}$
e. $sen\ \beta = \cos \alpha$



3. Con los datos de la figura, la expresión $tg\alpha - sen\alpha$ es igual a

a. $\frac{ac-bc}{ab}$
b. $\frac{ac-bc}{bc}$
c. $\frac{bc-ac}{ab}$
d. $\frac{bc-ac}{bc}$
e. $\frac{a-c}{b}$

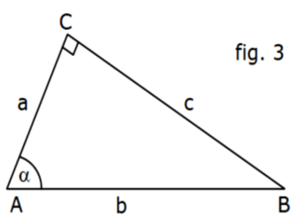


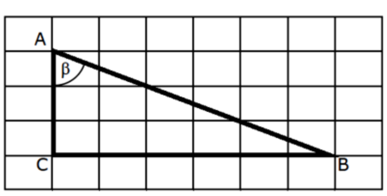
fig. 3

4. Si los catetos de un triángulo miden 8 cm y 15 cm, entonces el seno del ángulo agudo mayor es

a. $\frac{15}{17}$
b. $\frac{8}{17}$
c. $\frac{8}{15}$
d. $\frac{15}{8}$
e. $\frac{17}{15}$

5. En la hoja cuadriculada, cada cuadrado tiene lado 2. Entonces, en el ΔABC la tangente del ángulo β es igual a

a. $\frac{1}{\sqrt{5}}$
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
d. 2
e. $\sqrt{5}$



6. Si $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, entonces $cosec\ \alpha =$

a. $\frac{17}{8}$
b. $\frac{17}{15}$
c. $\frac{15}{8}$
d. $\frac{15}{17}$
e. $\frac{8}{15}$

7. Un avión despega del aeropuerto con un ángulo de elevación de 30° como se muestra en la figura. Si ha recorrido desde el punto de despegue una distancia de 1000 metros, ¿a qué altura, respecto del suelo se encuentra?

a. $500\sqrt{3}$ m
b. 500 m
c. $\frac{1000}{\sqrt{3}}$ m
d. $\frac{100}{\sqrt{3}}$ m
e. $\frac{1500}{\sqrt{3}}$ m

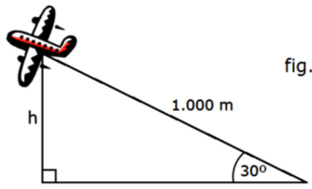


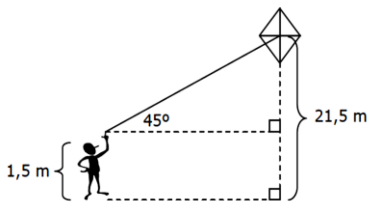
fig. 1

8. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 50 m de altura cuando el sol se ha elevado 40° sobre el horizonte?

a. $5 \cdot tg40°$ m
b. $\frac{50°}{sen40°}$ m
c. $\frac{50°}{tg40°}$ m
d. $\frac{tg40°}{50°}$ m
e. $\frac{cotg40°}{50°}$ m

9. ¿Cuál es la longitud del hilo que sujeta el volantín de la figura, si el ángulo de elevación es de 45°?

a. $20\sqrt{2}$ m
b. 21,5 m
c. $21{,}5\sqrt{2}$ m
d. 20 m
e. $10\sqrt{2}$ m



10. Si $k = \cos^2 60° + \cos^2 50° + sen^2 50°$, entonces **4k** es igual a

a. 7
b. 6
c. 5
d. 1,25
e. 1

11. Si α es un ángulo agudo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) identidad (es)?

i. $tg\alpha \cdot cosec\alpha = sec\alpha$
ii. $\frac{1}{1-\cos^2 \alpha} = cosec^2\alpha$
iii. $(sen\alpha + cos\alpha)(sen\alpha - cos\alpha) = 2sen^2\alpha - 1$

a. Solo i
b. Solo ii
c. Solo iii
d. Solo i y ii
e. i, ii y iii

12. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el cuadrado del coseno de α?

a. $cos\alpha^2$
b. $\frac{1}{cosec^2\alpha}$
c. $1 + sen^2\alpha$
d. $\frac{1}{\sec^2 \alpha}$
e. $sen^2\alpha - 1$

13. Si β es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades **NO** es(son) identidad(es)?

i. $sen\beta + cos\beta \cdot cotg\beta = cosec\beta$
ii. $sec\beta \cdot sen\beta = \sqrt{\sec^2 \beta - 1}$
iii. $tg\beta \cdot sen\beta = cos\beta$

a. Solo i
b. Solo ii
c. Solo iii
d. Solo i y ii
e. i, ii y iii

14. Si $\cos^2 \beta = \frac{4}{9}$, entonces $3sen\beta$=

a. $\frac{5}{9}$
b. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
c. $\frac{5}{3}$
d. $\sqrt{5}$
e. 5

Problemas:

Verifique las identidades trigonométricas a partir de las funciones dadas.

1. $(1 - sen^2\alpha)\sec^2\alpha = 1$

2. $sen\ \alpha \cdot tg\ \alpha = \sec\alpha - \cos\alpha$

3. $\cos\beta \cdot \cot\beta = cosec\ \beta - sen\ \beta$

4. $\frac{\sec^2\alpha}{tg^2\alpha} = cosec^2\alpha$

5. $sen\ \alpha(cosec\ \alpha - sen\ \alpha) = \cos^2\alpha$

6. Un cohete es lanzado a nivel del suelo, en un ángulo constante de 60º hasta una distancia de 3.000 metros. Determine a qué altura se encuentra del suelo. (R. 2.598 m)

7. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol, a cierta hora del día es de 30º, determine la longitud de la sombra que proyecta una persona que mide 1,6 m. (R. 92,3 cm)

8. Una escalera de 8 metros se encuentra apoyada en una pared y forma con ésta un ángulo de 40º. Calcule la distancia entre la pared y el pie de la escalera. (5,14 m)

9. Con los datos de la figura, la expresión $(sen\alpha + cos\alpha)^2$ es igual a: