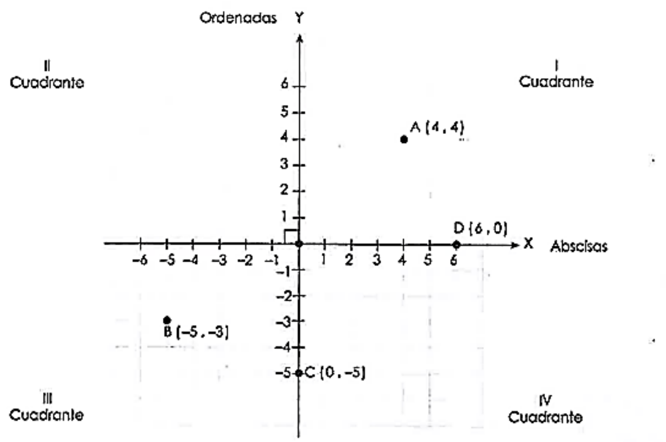
Liceo Bicentenario Los Ángeles
Depto. Matemática
Prof. Esteban Aros Sánchez

GUÍA DE MATERIA

"PUNTOS, VECTORES E ISOMETRÍA"

UNIDAD 0: REPASO CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA
NOMBRE:
CURSO:

1. Sistema cartesiano: El sistema cartesiano en dos dimensiones está formado por dos rectas perpendiculares y puntos en el espacio a los que se les asigna un valor por cada una de estas rectas. El eje horizontal (x) se llama "eje de las abscisas" y el eje vertical (y) se llama "eje de las ordenadas". El punto de intersección se considera como **origen** del sistema de coordenadas. Gráficamente la situación es así:



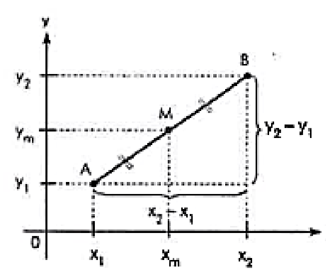
IMPORTANTE:
Los puntos que están en el eje X, tienen **ordenada** igual a cero. Sus coordenadas son (x, 0).
Los puntos que están en el eje Y, tienen **abscisa** igual a cero. Sus coordenadas son (0, y)

2. Distancia entre puntos y punto medio

- <u>Distancia entre puntos</u>: Sean los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), la medida de $\overline{AB}$ se determina por la fórmula que aparece a continuación:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula se obtiene de la aplicación del teorema de Pitágoras.

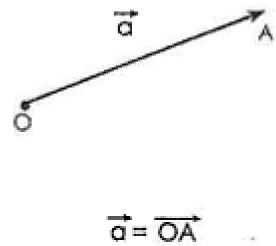


- <u>Punto medio de un segmento</u>: Sean los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ se determina por la fórmula que aparece a continuación:

$$X_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; Y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

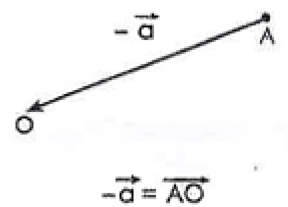
3. **Vectores**

Un vector es un segmento de recta que tiene un punto de origen y de destino. Los vectores se expresan con una letra minúscula y una flecha ($\vec{a}$) o con dos letras mayúsculas, que indican su origen y su destino ($\overrightarrow{OA}$).



Los vectores constan de los siguientes elementos:
- **Módulo o magnitud**: es la longitud del segmento.
- **Dirección**: está dada por la recta o cualquier paralela a ella.
- **Sentido**: Indicado por la flecha.

Sea un vector $\vec{a}$. El vector $-\vec{a}$ es el inverso aditivo de $\vec{a}$. El vector $-\vec{a}$ tiene igual módulo, dirección pero sentido contrario.



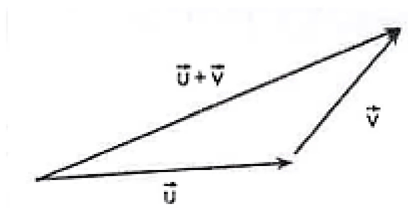
IMPORTANTE: Dos vectores son iguales o equipotentes, si tienen igual módulo, dirección y sentido.

Suma geométrica de vectores

Para sumar dos vectores de manera geométrica, simplemente debemos seguir el orden de la suma uniendo puntos de origen y destino de los vectores.

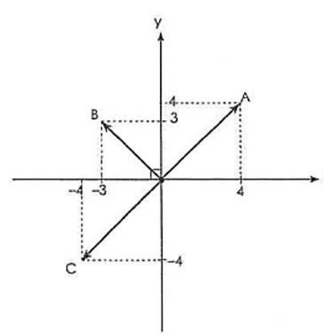
Ejemplo:

Para sumar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ hacemos lo siguiente: ponemos $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, haciendo coincidir el origen de $\vec{v}$ con el destino de $\vec{u}$. Luego $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector que va desde el origen de $\vec{u}$ hasta el extremo de $\vec{v}$.



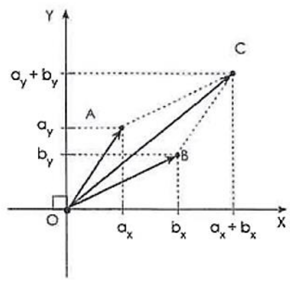
Vectores en el plano

En el plano cartesiano, un vector se representará geométricamente como uno que tenga como punto de origen, el origen del sistema de coordenadas.
A modo de ejemplo, en el plano cartesiano dibujaremos los siguientes vectores: $\vec{a} = (4{,}4)$, $\vec{b} = (-3{,}3)$, $\vec{c} = (-4,-4)$



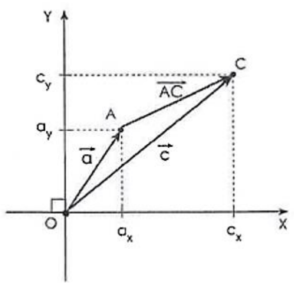
Operatoria con vectores

- Adición y sustracción: Sean los vectores: $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$, se cumple:



$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x, a_y + b_y\right)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$

Vectores no anclados en el origen



Sean los vectores: x

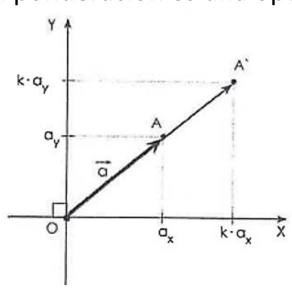
$\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{c} = (c_x, c_y)$, se cumple:

El vector $\overrightarrow{AC}$ se obtiene como:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$$
$$\overrightarrow{AC} = (c_x - a_x, c_y - a_y)$$

Ponderación por un escalar

La ponderación es una operación entre un escalar (número real) y un vector.



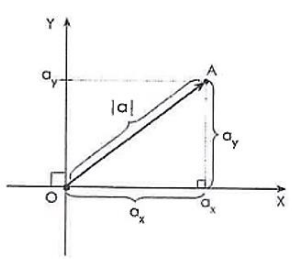
$$k \cdot \vec{a} = k\left(a_x, a_y\right) = (ka_x, ka_y)$$

El sentido y módulo varían de acuerdo al valor del escalar.

Si $k > 0$, se mantiene el sentido, pero cambia la magnitud.

Si $k < 0$, cambia tanto la magnitud como el sentido del vector.

Módulo o magnitud de un vector



El módulo de un vector se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$\left||\vec{a}|\right| = |\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + \left(a_y\right)^2}$$

Esta fórmula se obtiene de la aplicación del teorema de Pitágoras.

Vectores unitarios

Se definen los vectores unitarios $\hat{\imath} = (1,0)$ y $\hat{\jmath} = (0,1)$, de modo que cualquier vector en el plano se puede expresar en términos de ellos: $\vec{a} = \left(a_x, a_y\right) = a_x \cdot \hat{\imath} + a_y \cdot \hat{\jmath}$

Transformaciones isométricas

Son transformaciones (movimientos) que se aplican sobre una figura de manera que la figura resultante es congruente con la figura inicial, es decir, mantiene forma y tamaño.

Las transformaciones isométricas son: **traslación, rotación, simetría central y simetría axial.**

Traslación

Para trasladar un punto o figura, se necesita un vector traslación, el cual nos indica hacia dónde y cuánto se traslada la figura. (dirección, sentido y magnitud)

Para obtener la posición de un punto trasladado en el plano cartesiano, se debe sumar las coordenadas del punto inicial (x,y) más las coordenadas del vector traslación (u,v)

Punto inicial + Vector traslación = Punto final

$$(x, y) + T(u, v) = (x + u, y + v)$$

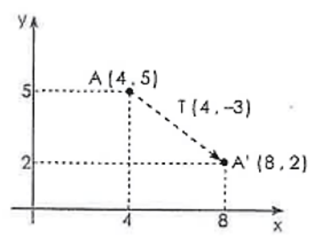
En caso de tener las coordenadas del punto inicial y final, y necesitar el vector traslación, este se encuentra restando las coordenadas del punto final menos el inicial, en ese orden.

IMPORTANTE: En una traslación, la figura jamás rota: es decir, el ángulo que forma con la horizontal no varía.

Ejemplo: Si al punto A de coordenadas (4,5), se le aplica una traslación dada por el vector traslación T(4,-3), entonces se obtiene el punto:

$$(4{,}5) + T(4, -3) = \big(4 + 4{,}5 + (-3)\big) = (8{,}2)$$

Gráficamente, esto es:



Rotación

Para rotar un punto o figura, se necesita un centro de rotación (punto en torno al cual se gira), un ángulo de rotación (indica cuánto se gira).

Si la rotación se efectúa en sentido contrario a como giran las manecillas del reloj, se dice que la rotación es positiva o antihoraria; en caso contrario, se dice que la rotación es negativa u horaria.

Rotaciones en torno al origen

Si rotamos el punto (x,y) con respecto al origen O(0,0) en un ángulo de giro de 90°, 180°, 270° o 360°, las coordenadas de los puntos obtenidos están dados en la siguiente tabla:

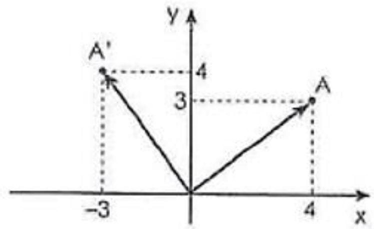
Inicial	90°	180°	270°	360°
(x,y)	(-y,x)	(-x,-y)	(y,-x)	(x,y)

Ejemplo: Si al punto A de coordenadas (4,3), se le aplica una rotación de 90° en torno al origen, entonces se obtiene el punto:

(x,y) → (-y,x)

A(4,3)→ A’(-3,4)

Gráficamente esto es:



Rotaciones en torno a un punto distinto al origen

En caso que el centro de rotación no sea el origen, el proceso para realizar la rotación es:
1°: encontrar el vector traslación que lleva el centro de rotación C hacia el punto a rotar A (vector $\overrightarrow{CA} = \vec{A} - \vec{C}$).
2°: aplicar al vector resultante $\overrightarrow{CA}$ la rotación requerida, utilizando la tabla anterior.
3°: sumar al centro de rotación el vector obtenido en el paso 2.

Ejemplo:
Si al punto A(11,5) se le aplica una rotación de 90° en torno al punto C(6,2) se obtiene el punto:

1°: $\overrightarrow{CA}: A(11,5) - C(6,2) = T(5,3)$
2°: Rotar $T(5,3)$ 90° usando la tabla resulta

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$(5,3) \rightarrow (-3,5)$$
$$T' = (-3,5)$$

3°: Sumar C + T':

$$C(6,2) + T'(-3,5) = A'(3,7)$$

Simetría Central
En una simetría central, un punto o figura es reflejada con respecto a otro punto llamado centro de simetría.
En una simetría central se cumple:
- Los trazos de la figura original son paralelos a los trazos homólogos de la figura transformada.
- Los puntos homólogos están a la misma distancia del centro de simetría.
- Una simetría respecto de un punto O equivale a una rotación en 180° de centro O.

Todo punto del plano cartesiano (x,y) tiene su simétrico con respecto al origen al punto (-x,-y)

La figura adjunta, muestra dos figuras simétricas respecto a un punto O. Aquí se cumple:

$$\overline{AO} = \overline{A'O}; \overline{BO} = \overline{B'O}; \overline{CO} = \overline{C'O}$$
$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'};\ \overline{AB} \parallel \overline{A'B'};\ \overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$$

Figuras con centro de simetría

Se dice que una figura tiene centro de simetría, si existe un punto por el cual, si se rota la figura en 180°, la figura resultante coincide con la figura original.

Algunas figuras conocidas que tienen centro de simetría son el círculo, cuadrado, rombo, rectángulo y todos los polígonos regulares de cantidad par de lados, como el hexágono regular, octágono regular, etc.

Algunas figuras conocidas que **NO** tienen centro de simetría son: triángulos, romboide, trapecios, trapezoides y todos los polígonos regulares de cantidad impar de lados, como por ejemplo el pentágono regular, heptágono regular, etc.

Simetría Axial

En una simetría axial, un punto o una figura es reflejada con respecto a una recta, llamada eje de simetría, formándose un efecto espejo.

En una simetría axial se cumple:

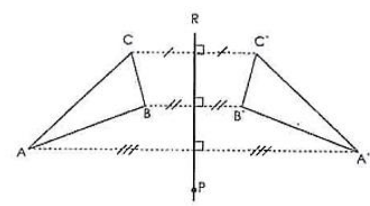
- Los puntos homólogos quedarán a la misma distancia del eje de simetría.
- El segmento que une los puntos homólogos, es perpendicular al eje de simetría.

Todo punto del plano cartesiano A(x, y) tiene un simétrico A' (x, -y) con respecto al eje de las abscisas (eje x) y un simétrico A''(-x , y) con respecto al eje de las ordenadas (eje y).

La figura adjunta, muestra dos triángulos simétricos respecto a una recta R. Aquí se cumple:

$$\overline{AA'} \perp R; \overline{BB'} \perp R; \overline{CC'} \perp R$$
$$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$$

El punto P está sobre la recta R, por lo tanto, su imagen es el mismo punto.



Figuras con eje de simetría

Podemos entender el eje de simetría en base a la siguiente idea: si doblamos una figura respecto a una línea, y las dos mitades coinciden, en ese caso esa línea corresponde al eje de simetría.

En general las figuras pueden tener tantos ejes de simetría como sea posible, por ejempli: el cuadrado tiene 4, el triángulo equilátero tiene 3: el triángulo isósceles 1, el rectángulo 2, el circulo infinitos, etc.

Como norma general podemos decir que los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como numero de lados poseen.

Geometría del Espacio

Puntos en el espacio

En el sistema tridimensional todo punto quedará determinado por un trío ordenado.

El orden de las coordenadas es: (Abscisa "x"; Ordenada "y"; Cota "z")

En la figura adjunta observamos tres ejes: x, y, z, mutuamente perpendiculares que generan también tres planos perpendiculares: xy, xz, yz.

Vemos que se ha dibujado un paralelepípedo y se han ubicado los puntos: A=(0,4,3) y B=(5,0,0)